Теория устойчивости разностных схем

1 Операторно-разностные схемы

1.1 Введение

Пусть $\mathfrak{B}$ — банахово (то есть полное нормированное) пространство функций, заданных в некоторой области $G \subset \mathbb{R}_m$, и пусть $u(t)$ — абстрактная функция аргумента $t \in [0, t_0]$ со значениями в пространстве $\mathfrak{B}$. Пусть A — линейный оператор, действующий из $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{B}$, $D(A)$ — его область определения. Будем считать, что область определения оператора A является всюду плотным множеством в $\mathfrak{B}$, то есть замыкание $D(A)$ совпадает с $\mathfrak{B}$: $\overline{D(A)} = \mathfrak{B}$.

Рассмотрим абстрактную задачу Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = f(t), \;\; t \in (0, t_0], \\ u(0) = u_0 \in D(A). \end{cases} \tag{1.1}$$

Определение 1.1 *Задача Коши (1.1) называется устойчивой по начальным данным и по правой части, если при всех $t \in [0, t_0]$ справедливо неравенство:*

$$\|u(t)\| \leqslant M_1 \|u_0\| + M_2 \int\limits_0^t \|f(t')\| dt',$$

где $M_1 > 0$ и $M_2 > 0$ — числа, не зависящие от t.

Определение 1.2 *Задача Коши (1.1) называется равномерно устойчивой по начальным данным, если для решения задачи*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = 0, \;\; t \in (0, t_0], \\ u(0) = u_0 \in D(A) \end{cases}$$

справедливо неравенство:

$$\|u(t)\| \leqslant M_1 \|u(t')\|, \;\; t \geqslant t' \geqslant 0.$$

1.2 Операторно-разностные схемы

Рассмотрим разностную аппроксимацию задачи (1.1). Для этого введем в области G сетку и будем далее рассматривать на ней сеточные функции $y_h(t)$. Пусть $h = \{h_1, h_2, ..., h_m\}$ — параметр, характеризующий выбранную сетку, h_i — шаг по направлению x_i, $i = 1, 2, ..., m$. Введем сеточный аналог банахова пространства $\mathfrak{B}$. Пусть $\mathfrak{B}_h$ — линейная система сеточных функций, зависящих от параметра h, то есть для любых функций $y_h^{(1)}(t), y_h^{(2)}(t) \in \mathfrak{B}_h$ и любых чисел α_1, α_2 линейная комбинация $\alpha_1 y_h^{(1)}(t) + \alpha_2 y_h^{(2)}(t)$ также принадлежит $\mathfrak{B}_h$. Если ввести на $\mathfrak{B}_h$ норму, то получим сеточное линейное нормированное (банахово) пространство.

Введем сетку по времени $\overline{\omega}_\tau \equiv \{t_j = j \cdot \tau;\ j = 0, 1, ..., j_0;\ \tau = t_0/j_0\}$ и будем использовать обозначение ω_τ для временных слоев t_j, $j = 1, 2, ..., j_0$. Далее будем рассматривать абстрактные функции дискретного аргумента $t_j = j\tau \in \overline{\omega}_\tau$ со значениями в $\mathfrak{B}_h$: $y = y(t_j) = y_j \in \mathfrak{B}_h$.

Определение 1.3 *Семейство разностных уравнений* $(r-1)$ *-го порядка:*

$$B_0(t_j)y_{j+1} = \sum_{s=1}^{r-1} C_s(t_j)y_{j+1-s} + F_j, \quad j = r-2, r-1, r, r+1, ..., \tag{1.2}$$

зависящих от параметров h *и* τ*, коэффициенты которых* B_0*,* $C_1, ..., C_{r-1}$ *представляют собой линейные операторы, действующие на* $\mathfrak{B}_h$ *и зависящие от* h *и* τ*, будем называть* r*-слойной операторно-разностной схемой или просто* r*-слойной схемой.*

В r-слойной схеме значение y_{j+1} на $(j+1)$-м слое определяется через $(r-1)$ значений: $y_j, y_{j-1}, y_{j-2}, ..., y_{j-r+2}$. Если существует B_0^{-1}, то y_{j+1} может быть выражено через $y_0, y_1, ..., y_{r-2}$ и F.

В случае $r = 2$ схема (1.2) называется *двухслойной*. Она может быть записана в виде:

$$\begin{cases} B_0(t_j)y_{j+1} + B_1(t_j)y_j = \tau\varphi_j, \quad j = 0, 1, ...; \\ y_0 = y^{(0)}, \end{cases} \tag{1.3}$$

где $B_1 = -C_1$, $\varphi_j = F_j/\tau$, $y^{(0)} \in \mathfrak{B}_h$ — заданная функция.

В случае $r = 3$ схема (1.2) называется *трехслойной*. Она может быть записана в виде:

$$\begin{cases} B_0(t_j)y_{j+1} + B_1(t_j)y_j + B_2(t_j)y_{j-1} = \tau\varphi_j, \quad j = 1, 2, ...; \\ y_0 = y^{(0)}, \quad y_1 = y^{(1)}, \end{cases} \tag{1.4}$$

где $B_p = -C_p$, $p = 1, 2$, $\varphi_j = F_j/\tau$, $y^{(0)}, y^{(1)} \in \mathfrak{B}_h$ — заданные функции.

1.3 Канонические формы двухслойной и трехслойной схем

Двухслойную схему (1.3) можно переписать в виде, более наглядно отражающем структуру исходного дифференциального уравнения:

$$\begin{cases} B(t_j)\dfrac{y_{j+1}-y_j}{\tau} + A(t_j)y_j = \varphi_j, \;\; j = 0, 1, ...; \\ y_0 = y^{(0)}, \end{cases} \tag{1.5}$$

где $B = B_0$, $A = (B_0 + B_1)/\tau$. Используя обозначение y_t для односторонней разностной производной по времени, схему (1.5) можно записать более кратко:

$$\begin{cases} By_t + Ay = \varphi, \;\; j = 0, 1, ... \\ y_0 = y^{(0)}, \end{cases} \tag{1.6}$$

Определение 1.4 *Задачи (1.5) и (1.6) называют канонической формой двухслойных схем.*

Если $B = E$, то соответствующая двухслойная схема:

$$y_{j+1} = y_j - \tau Ay_j + \tau\varphi_j$$

называется явной, если же $B \neq E$, то схема называется неявной. Наряду с (1.5) и (1.6) используется следующая запись двухслойной схемы:

$$By_{j+1} = Cy_j + \tau\varphi_j, \quad C = B - \tau A.$$

Если существует оператор B^{-1}, то схему (1.6) можно переписать в виде:

$$\hat{y} = Sy + \tau\tilde{\varphi}, \qquad S = E - \tau B^{-1}A, \;\; \tilde{\varphi} = B^{-1}\varphi. \tag{1.7}$$

Определение 1.5 *Оператор S называют оператором перехода со слоя на слой.*

Пример 1.1. *В качестве примера двухслойной схемы рассмотрим схему с весами для уравнения теплопроводности:*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f, \quad Lu = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

Схема с весами имеет вид:

$$y_t = \Lambda\left(\sigma\hat{y} + (1-\sigma)y\right) + \varphi, \quad \sigma \in (0, 1],$$

где $\Lambda y = \left(a(x)y_{\bar{x}}\right)_x$, $a(x) = k(x - 0.5h)$. Приведем схему к каноническому виду:

$$y_t - \sigma\tau\Lambda y_t - \Lambda y = \varphi \;\Rightarrow\; A = -\Lambda, \;\; B = E + \sigma\tau A.$$

Если $\|\sigma\tau A\| < 1$, *то существует* B^{-1}.

Рассмотрим теперь каноническую форму трехслойной разностной схемы, отражающую структуру исходного дифференциального уравнения:

$$B\frac{y_{j+1}-y_{j-1}}{2\tau}+R\left(y_{j+1}-2y_j+y_{j-1}\right)+Ay_j=\varphi_j, \tag{1.8}$$

где $B=B_0-B_2$, $R=\dfrac{1}{2\tau}(B_0+B_2)$, $A=\dfrac{1}{\tau}(B_0+B_1+B_2)$. Уравнение (1.8) можно записать более кратко, используя обозначения для первой центральной производной и второй производной по времени.

Определение 1.6 *Канонической формой трехслойной схемы называют схему вида:*

$$\begin{cases} By_{\mathring{t}}+\tau^2Ry_{\bar{t}t}+Ay=\varphi(t), \;\; 0<t=j\tau\in\omega_\tau, \\ y_0=y^{(0)}, \;\; y_1=y^{(1)}, \end{cases} \tag{1.9}$$

где $y_{\mathring{t}}=\dfrac{y_{j+1}-y_{j-1}}{2\tau}$, $y_{\bar{t}t}=\dfrac{y_t-y_{\bar{t}}}{\tau}=\dfrac{y_{j+1}-2y_j+y_{j-1}}{\tau^2}$.

1.4 Понятие устойчивости для двухслойных схем

Определение 1.7 *Схема*

$$\begin{cases} By_t+Ay=\varphi, \;\; j=0,1,... \\ y_0=y^{(0)} \end{cases} \tag{1.10}$$

называется корректной, если при достаточно малых $\tau\leqslant\tau_0$ *и* $|h|\leqslant h_0$*:*
1) решение задачи (1.10) существует и единственно при любых начальных данных $y^{(0)}\in\mathfrak{B}_h$ *и правых частях* $\varphi(t_j)\in\mathfrak{B}_h$ *для всех* $t_j\in\overline{\omega}_\tau$*;*
2) существуют такие постоянные $M_1>0$ *и* $M_2>0$*, не зависящие от параметров* τ *и* h *и выбора* $y^{(0)}$ *и* φ*, что при любых начальных данных* $y^{(0)}\in\mathfrak{B}_h$ *и правых частях* $\varphi(t_j)\in\mathfrak{B}_h$ *для всех* $t_j\in\overline{\omega}_\tau$ *для решения задачи (1.10) справедлива оценка:*

$$\|y(t_j)\|_{(h1)}\leqslant M_1\|y^{(0)}\|_{(h1)}+M_2\max_{0\leqslant t'\leqslant t_j}\|\varphi(t')\|_{(h2)}. \tag{1.11}$$

Неравенство (1.11) выражает свойство непрерывной зависимости, равномерной по h *и* τ*, решения задачи Коши (1.10) от входных данных. Это свойство и называется устойчивостью.*

Определение 1.8 *Разностная схема называется абсолютно устойчивой, если она устойчива при любых* τ *и* h*, а не только при достаточно малых.*

Если неравенство (1.11) выполняется при $M_2 = 0$, то говорят, что разностная схема устойчива по начальным данным, если (1.11) выполняется при $M_1 = 0$, то говорят, что разностная схема устойчива по правой части.

1.5 Достаточные условия устойчивости двухслойных схем в линейных нормированных пространствах

Как было сказано выше, если существует обратный оператор B^{-1}, то задачу (1.10) можно переписать в виде:

$$\begin{cases} y_{j+1} = S_j y_j + \tau\tilde{\varphi}_j, \quad \tilde{\varphi}_j = B_j^{-1}\varphi_j, \ \ j = 0, 1, 2, ..., j_0 - 1, \\ y_0 = y^{(0)} \in \mathfrak{B}_h, \end{cases} \tag{1.12}$$

где $S_j = E - \tau B_j^{-1} A_j$ — оператор перехода со слоя на слой, зависящий от $t_j = j\tau$, h и τ. Из уравнения (1.12) получаем:

$$y_{j+1} = S_j\left(S_{j-1}y_{j-1} + \tau\tilde{\varphi}_{j-1}\right) + \tau\tilde{\varphi}_j = S_jS_{j-1}y_{j-1} + \tau\left(S_j\tilde{\varphi}_{j-1} + \tilde{\varphi}_j\right) = ... =$$

$$= S_jS_{j-1}...S_0y_0 + \tau\left(\tilde{\varphi}_j + S_j\tilde{\varphi}_{j-1} + S_jS_{j-1}\tilde{\varphi}_{j-2} + ... + S_jS_{j-1}...S_1\tilde{\varphi}_0\right).$$

Введем обозначения: $T_{j+1,j+1} = E$, $T_{j+1,p} = S_jS_{j-1}...S_{p+1}S_p$, $p = 0, 1, ..., j$. Тогда уравнение (1.12) можно записать в виде:

$$y_{j+1} = T_{j+1,0}y_0 + \sum_{p=0}^{j} T_{j+1,p+1}\tilde{\varphi}_p\tau. \tag{1.13}$$

Определение 1.9 *Оператор $T_{j+1,p}$ называется оператором перехода со слоя p на слой $j+1$, а оператор $T_{j+1,0}$ называется разрешающим оператором.*

Теорема 1.10 *Для устойчивости схемы (1.12) достаточно, чтобы оператор B^{-1} был ограниченным и выполнялось условие $\|T_{j,p}\| \leqslant M_1$ при всех $0 \leqslant p \leqslant j \leqslant j_0$. При этом для решения задачи (1.12) верна априорная оценка:*

$$\|y_{j+1}\|_{(h1)} \leqslant M_1 \left\{ \|y_0\|_{(h1)} + \sum_{p=0}^{j} \|B_p^{-1}\varphi_p\|_{(h1)}\tau \right\} \tag{1.14}$$

для всех $j = 0, 1, ..., j_0$.

Доказательство. Применим неравенство треугольника к уравнению (1.13):

$$\|y_{j+1}\|_{(h1)} \leqslant \|T_{j+1,0}y_0\|_{(h1)} + \tau\left\|\sum_{p=0}^{j} T_{j+1,p+1}\tilde{\varphi}_p\right\| \leqslant \|T_{j+1,0}\| \cdot \|y_0\|_{(h1)} + \tau\sum_{p=0}^{j} \|T_{j+1,p+1}\| \cdot \|\tilde{\varphi}_p\|_{(1h)}.$$

Так как по условию $\|T_{j,p}\| \leqslant M_1$ при всех $0 \leqslant p \leqslant j \leqslant j_0$, то

$$\|y_{j+1}\|_{(h1)} \leqslant M_1 \left\{ \|y_0\|_{(h1)} + \sum_{p=0}^{j} \|B_p^{-1}\varphi_p\|_{(h1)}\tau \right\}.$$

Так как

$$\sum_{p=0}^{j} \|B_p^{-1}\varphi_p\|_{(h1)}\tau \leqslant j\tau \max_{p=0,\dots,j} \|B_p^{-1}\varphi_p\|_{(h1)} \leqslant j\tau \max_{p=0,\dots,j} \|B_p^{-1}\| \cdot \max_{0\leqslant t'\leqslant t_j} \|\varphi(t')\|_{(h2)},$$

то поскольку $j\tau \leqslant j_0\tau = t_0$, а $\max\limits_{p=0,\dots,j} \|B_p^{-1}\| \leqslant \max\limits_{p=0,\dots,j_0} \|B_p^{-1}\|$, для y_{j+1} справедливо неравенство (1.11), где $M_2 = M_1 \cdot t_0 \cdot \max\limits_{p=0,\dots,j_0} \|B_p^{-1}\|$.

Теорема 1.11 *Для устойчивости схемы (1.12) достаточно, чтобы для нормы ее оператора перехода со слоя на слой S_j выполнялась оценка:*

$$\|S_j\| \leqslant 1 + C_0\tau, \quad j = 0, 1, 2, ..., j_0 - 1, \tag{1.15}$$

где $C_0 \geqslant 0$ — постоянная, не зависящая от τ и h. При этом для решения верна априорная оценка (1.14), где $M_1 = e^{C_0 t_0}$.

Доказательство. Оценим норму оператора $T_{j,p}$:

$$\|T_{j,p}\| = \|S_{j-1}S_{j-2}...S_{p+1}S_p\| \leqslant \|S_{j-1}\| \cdot \|S_{j-2}\| \cdot ... \cdot \|S_{p+1}\| \cdot \|S_p\| \leqslant (1 + C_0\tau)^{j-p} \leqslant$$

$$\leqslant (1 + C_0\tau)^{j} \leqslant (1 + C_0\tau)^{j_0} \leqslant \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(C_0\tau)^k}{k!} \right)^{j_0} = \left(e^{C_0\tau}\right)^{j_0} = e^{C_0\tau j_0} = e^{C_0 t_0} = M_1.$$

Определение 1.12 *Схема (1.10) называется равномерно устойчивой по начальным данным, если*

$$\|y_j\|_{(h1)} \leqslant M_1 \|y_p\|_{(h1)}, \quad 0 \leqslant p \leqslant j \leqslant j_0, \tag{1.16}$$

где $M_1 > 0$ — постоянная, не зависящая от τ и h.

Теорема 1.13 *Если схема (1.12) равномерно устойчива по начальным данным, то она устойчива и по правой части при условии, что $\|B^{-1}\| \leqslant C_1$, где $C_1 > 0$ — постоянная, не зависящая от h и τ.*

Доказательство. Если выполнено условие равномерной устойчивости схемы по начальным данным, то $\|T_{j,p}\| \leqslant M_1$. Тогда, в силу теоремы (1.10), схема устойчива и по правой части.

Рассмотрим двухслойную схему с постоянными операторами A и B. Если оператор B имеет ограниченный обратный, то она эквивалентна задаче

$$\begin{cases} y_{j+1} = Sy_j + \tau\tilde{\varphi}_j, \quad \tilde{\varphi}_j = B^{-1}\varphi_j, \quad j = 0, 1, ..., j_0 - 1, \\ y_0 = y^{(0)}, \end{cases} \tag{1.17}$$

где $S = E - \tau B^{-1}A$ — постоянный оператор. Если схема с постоянным оператором S устойчива по начальным данным, то она и равномерно устойчива по начальным данным, так как

$$T_{j,p} = T_{j-p,0} = S^{j-p}. \tag{1.18}$$

Теорема 1.14 *Устойчивость по начальным данным схемы (1.17) с постоянными операторами необходима и достаточна для устойчивости по правой части при условии, что* $\|B^{-1}\| \leqslant C_1$, *где* $C_1 > 0$ — *постоянная, не зависящая от* h *и* τ. *При этом верна априорная оценка:*

$$\|y_{j+1}\|_{(h1)} \leqslant M_1 \left\{ \|y_0\|_{(h1)} + C_1 \sum_{p=0}^{j} \|\varphi_p\|_{(h2)}\tau \right\} \tag{1.19}$$

для всех $j = 0, 1, ..., j_0$.

Доказательство.

1) *Достаточность.* Устойчивость по начальным данным означает ограниченность разрешающего оператора: $\|T_{j,0}\| \leqslant M_1$. В силу равенства (1.18) получаем:

$$T_{j,0} = S^j = T_{j+p,p} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant p \leqslant j \leqslant j_0,$$

что в свою очередь означает ограниченность операторов перехода $T_{j+p,p}$. Следовательно, пользуясь теоремой 1.10, получаем утверждение доказываемой теоремы.

2) *Необходимость.* Пусть схема (1.17) устойчива по правой части:

$$\|y_{j+1}\|_{(h1)} \leqslant M_1 \sum_{p=0}^{j} \|\tilde{\varphi}_j\|_{(h1)}\tau, \quad j = 0, 1, 2, ..., j_0 - 1.$$

Эта оценка справедлива для любой правой части $\tilde{\varphi}_j = B^{-1}\varphi_j$. В случае задачи с нулевым начальным условием ($y^{(0)} = 0$) решение имеет вид:

$$y_{j+1} = \tau \sum_{p=0}^{j} T_{j+1,p+1}\tilde{\varphi}_p.$$

Покажем, что разрешающий оператор $T_{j,0} = T_{j+1,1}$ ограничен. Для этого выберем правую часть вида $\tau\tilde{\varphi}_j = \delta_{j,0}f$, где $f \in \mathfrak{B}_h$ — произвольная функция. Тогда

$$y_{j+1} = T_{j+1,1}f = T_{j,0}f,$$

и следовательно,

$$\|T_{j,0}f\|_{(h1)} \leqslant M_1\|f\|_{(h1)}.$$

Рассмотрим все возможные f, принадлежащие единичной сфере в $\mathfrak{B}_h$: $\|f\|_{(h1)} = 1$. Тогда:

$$\|T_{j,0}\| = \sup_{\|f\|_{(h1)}=1} \|T_{j,0}f\|_{(h1)} \leqslant M_1,$$

что и требовалось доказать.

Итак, если оператор S постоянен, то исследование устойчивости схемы сводится к оценке нормы оператора перехода.

2 Классы устойчивости двухслойных схем

2.1 Исходное семейство схем

Будем рассматривать двухслойную схему

$$\begin{cases} By_t + Ay = \varphi(t), \ \ t = j\tau \in \omega_\tau; \\ y(0) = y^{(0)}. \end{cases} \tag{2.1}$$

Операторы A и B в общем случае зависят от параметров h и τ, а также от t.

Пусть H_h — конечномерное вещественное линейное пространство, в котором введено скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$, а норма определена следующим образом:

$$\|y\| = \sqrt{(y,y)}, \quad y \in H_h.$$

Будем пользоваться следующим определением устойчивости разностной схемы (2.1):

$$\|y(t+\tau)\|_{(1h)} \leqslant M_1\|y^{(0)}\|_{(1h)} + M_2 \max_{0\leqslant t'\leqslant t} \|\varphi(t')\|_{(2h)}. \tag{2.2}$$

В данном разделе будут сформулированы условия на операторы A и B, при которых схема (2.1) устойчива в различных пространствах H_h.

Определение 2.1 *Нормой оператора A называется число, определяемое следующим образом:*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_{(1h)}=1} \|Ax\|_{(2h)} \ \ \textit{или} \ \ \|A\| = \sup_{x\in H_h} \frac{\|Ax\|_{(2h)}}{\|x\|_{(1h)}}.$$

Всюду далее будем считать, что A — положительно определенный оператор, то есть $(Ax,x) \geqslant 0$ для любого $x \in H_h$, причем $(Ax,x) = 0$, только если $x = 0$.

Определение 2.2 *Число (Ax, x) называется энергией оператора A.*

Говорят, что $A \geqslant B$ (по энергии), если $((A - B)x, x) \geqslant 0$ для всех $x \in H_h$. Если оператор A является самосопряженным, то есть $A = A^*$, то в H_h можно ввести так называемую *энергетическую* норму.

Определение 2.3 *Энергетической называется норма, порождаемая энергией оператора:*

$$\|y\|_A = \sqrt{(Ay, y)}. \tag{2.3}$$

Линейное пространство с нормой (2.3) будем обозначать H_A. Будем говорить, что схема (2.1) устойчива в энергетическом пространстве H_A, если выполнено неравенство (2.2), в котором $\|\cdot\|_{(1h)} = \|\cdot\|_A$.

Исследование устойчивости будем проводить в некотором *исходном семействе* разностных схем. Операторы A и B будем считать ограниченными линейными операторами, заданными на всем пространстве $H_h : \mathfrak{D}(A) = \mathfrak{D}(B) = H_h$. Кроме того, предположим, что задача (2.1) разрешима при любых входных данных $y^{(0)}$ и $\varphi(t)$, то есть что существует ограниченный оператор B^{-1} с областью определения $\mathfrak{D}(B^{-1}) = H_h$.

Далее для упрощения выкладок предположим, что:

1) операторы A и B не зависят от t;

2) оператор B положительно определенный;

3) оператор A самосопряженный и положительно определенный.

В качестве примера рассмотрим схему с весами для уравнения теплопроводности на отрезке $[0, 1]$:

$$\begin{cases} y_t = \Lambda\left(\sigma\hat{y} + (1-\sigma)y\right) + \varphi, \quad x \in \omega_h[0,1], \ t \in \omega_\tau; \\ y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\omega_h}[0, 1]; \\ y(0, t) = 0, \quad y(1, t) = 0, \ t \in \overline{\omega_\tau}; \end{cases}$$

где

$$\Lambda y \equiv \left(a(x) y_{\bar{x}}\right)_x, \quad a(x) > 0.$$

Положим $A = -\Lambda$. Покажем, что оператор A самосопряженный и положительно определенный. Пусть y и v — произвольные ограниченные сеточные функции на $\overline{\omega_h}[0, 1]$, обращающиеся в ноль при $x = 0$ и $x = 1$. Воспользуемся первой формулой Грина:

$$(Ay, v) = -\left(\left(a(x) y_{\bar{x}}\right)_x, v\right) = (a y_{\bar{x}}, v_{\bar{x}}] = \sum_{k=1}^{k_0} a_k y_{\bar{x},k} v_{\bar{x},k} h = (a v_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}] = -\left(y, \left(a(x) v_{\bar{x}}\right)_x\right) = (y, Av),$$

то есть оператор A самосопряженный. Из первой формулы Грина также следует, что для любой сеточной функции y, такой что $y_0 = y_{k_0} = 0$, справедливо неравенство:

$$(Ay, y) = (ay_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}] = \sum_{k=1}^{k_0} a_k y_{\bar{x},k}^2 h \geqslant 0,$$

так как по условию $a(x) > 0$, причем $(Ay, y) = 0$ только если $y \equiv 0$. Следовательно, оператор A положительно определенный. Перепишем уравнение в рассматриваемой разностной схеме в виде:

$$(E - \sigma\tau\Lambda)y_t = \Lambda y + \varphi \quad \Leftrightarrow \quad By_t + Ay = \varphi,$$

где $B = E - \sigma\tau\Lambda = E + \sigma\tau A$. В данном случае оператор B также является положительно определенным и самосопряженным, так что схема принадлежит рассматриваемому классу.

2.2 Метод энергетических неравенств

2.2.1 Первое энергетическое тождество

Умножим (2.1) скалярно на $2\tau y_t = 2(\hat{y} - y)$:

$$2\tau(By_t, y_t) + 2\tau(Ay, y_t) = 2\tau(\varphi, y_t).$$

Пользуясь равенством:

$$y = \frac{\hat{y} + y}{2} - \frac{\hat{y} - y}{2} = 0.5(\hat{y} + y) - 0.5\tau y_t,$$

получим:

$$2\tau((B - 0.5\tau A)y_t, y_t) + (A(\hat{y} + y), \hat{y} - y) = 2\tau(\varphi, y_t).$$

Так как по предположению оператор A самосопряженный, то

$$(A(\hat{y} + y), \hat{y} - y) = (A\hat{y}, \hat{y}) + (Ay, \hat{y}) - (A\hat{y}, y) - (Ay, y) = (A\hat{y}, \hat{y}) - (Ay, y),$$

так как $(Ay, \hat{y}) = (y, A\hat{y}) = (A\hat{y}, y)$. В результате приходим к первому энергетическому тождеству:

$$2\tau((B - 0.5\tau A)y_t, y_t) + (A\hat{y}, \hat{y}) = (Ay, y) + 2\tau(\varphi, y_t). \tag{2.4}$$

2.2.2 Второе энергетическое тождество

Предположим, что оператор B также является самосопряженным, то есть $B = B^*$. Умножим (2.1) скалярно на $2\tau\hat{y}$:

$$2\tau(By_t, \hat{y}) + 2\tau(Ay, \hat{y}) = 2\tau(\varphi, \hat{y}). \tag{2.5}$$

Используя формулы:

$$y = 0.5(\hat{y} + y) - 0.5\tau y_t, \quad \hat{y} = 0.5(\hat{y} + y) + 0.5\tau y_t,$$

получаем:

$$2\tau(By_t, \hat{y}) = (B(\hat{y} - y), \hat{y} + y) + \tau^2(By_t, y_t) = (B\hat{y}, \hat{y}) - (By, y) + \tau^2(By_t, y_t) =$$

$$= \|\hat{y}\|_B^2 - \|y\|_B^2 + \tau^2\|y_t\|_B^2;$$

$$2\tau(Ay, \hat{y}) = 0.5\tau(A(\hat{y} + y - \tau y_t), \hat{y} + y + \tau y_t) = 0.5\tau(A(\hat{y} + y), \hat{y} + y) - 0.5\tau^3(Ay_t, y_t) =$$

$$= 0.5\tau\|\hat{y} + y\|_A^2 - 0.5\tau^3\|y_t\|_A^2.$$

Подставляя полученные выражения в (2.5), приходим ко второму энергетическому тождеству:

$$\|\hat{y}\|_B^2 + \tau^2\left(\|y_t\|_B^2 - 0.5\tau\|y_t\|_A^2\right) + 0.5\tau\|\hat{y} + y\|_A^2 = \|y\|_B^2 + 2\tau(\varphi, \hat{y}). \tag{2.6}$$

2.3 Устойчивость по начальным данным в H_A

Теорема 2.4 *Условие*

$$B \geqslant 0.5\tau A \tag{2.7}$$

является необходимым и достаточным для устойчивости схемы (2.1) из исходного семейства в пространстве H_A по начальным данным с постоянной $M_1 = 1$, то есть для выполнения оценки

$$\|y_j\|_A \leqslant \|y^{(0)}\|_A, \quad j = 1, 2, ..., j_0, \tag{2.8}$$

где y_j — решение задачи (2.1).

Замечание 2.5 *Условие (2.7) понимается как $((B - 0.5\tau A)x, x) \geqslant 0$ для всех $x \in H_h$ и называется критерием устойчивости Самарского.*

Доказательство.

1) *Достаточность.* Пусть выполнено условие (2.7). Тогда из первого энергетического тождества (2.4) при $\varphi = 0$:

$$2\tau((B - 0.5\tau A)y_t, y_t) + (A\hat{y}, \hat{y}) = (Ay, y)$$

следует, что $(A\hat{y}, \hat{y}) \leqslant (Ay, y)$, или же $\|\hat{y}\|_A^2 \leqslant \|y\|_A^2$, откуда получаем:

$$\|y_{j+1}\|_A \leqslant \|y_j\|_A \leqslant ... \leqslant \|y_0\|_A.$$

2) *Необходимость.* Пусть схема (2.1) устойчива по начальным данным и выполнено условие (2.8). Рассмотрим первое энергетическое тождество (2.4) при $\varphi = 0$ и $j = 0$:

$$2\tau((B - 0.5\tau A)y_t(0), y_t(0)) + (Ay_1, y_1) = (Ay_0, y_0)$$

или же

$$2\tau((B - 0.5\tau A)y_t(0), y_t(0)) = (Ay_0, y_0) - (Ay_1, y_1) = \|y_0\|_A^2 - \|y_1\|_A^2.$$

Так как по условию $\|y_1\|_A \leqslant \|y_0\|_A$, то

$$((B - 0.5\tau A)y_t(0), y_t(0)) \geqslant 0. \tag{2.9}$$

Нам необходимо доказать, что неравенство $((B - 0.5\tau A)v, v) \geqslant 0$ справедливо для любого элемента $v \in H_h$. Так как по условию теоремы схема (2.1) принадлежит исходному семейству, то $A > 0$ и $B > 0$, а значит существуют ограниченные операторы A^{-1} и B^{-1}. Выберем произвольный элемент $v \in H_h$. Ему соответствует единственный элемент $y_0 = -A^{-1}Bv \in H_h$, такой что $Bv + Ay_0 = 0$, причем $v = -B^{-1}Ay_0 = y_t(0)$. Следовательно, из (2.9) получаем, что интересующее нас неравенство $((B - 0.5\tau A)v, v) \geqslant 0$ выполнено для любого элемента $v = y_t(0) \in H_h$, то есть имеет место неравенство (2.7).

Замечание 2.6 *Условие (2.7) остается достаточным для устойчивости схемы (2.1) по начальным данным и в случае, когда $B = B(t) > 0$ является переменным несамосопряженным положительно определенным оператором.*

В качестве примера исследуем рассмотренную выше схему с весами для уравнения теплопроводности. Как было показано, для нее

$$A = -\left(a(x)y_{\bar{x}}\right)_x, \quad \text{где} \quad a(x) > 0,$$

$$B = E + \sigma\tau A,$$

причем операторы A и B являются самосопряженными и положительно определенными.

Необходимое и достаточное условие устойчивости по начальным данным для рассматриваемой схемы имеет вид:

$$B - 0.5\tau A = E + (\sigma - 0.5)\tau A \geqslant 0.$$

Так как $A \leqslant \|A\|E$, то $E \geqslant \|A\|^{-1}A$, откуда получаем:

$$B - 0.5\tau A \geqslant \left(\|A\|^{-1} + (\sigma - 0.5)\tau\right)A,$$

то есть условие (2.7) будет выполнено, если $\sigma \geqslant 0.5 - \dfrac{1}{\tau\|A\|}$.

Оценим норму оператора A. Так как он самосопряженный и положительно определенный, то

$$\|A\| = \sup_{\|y\|_{(1h)}} (Ay, y).$$

Поскольку $y_0 = y_{k_0} = 0$, то, применяя первую формулу Грина, получаем:

$$(Ay, y) = \sum_{k=1}^{k_0} a_k y_{\bar{x},k}^2 \leqslant \max_{0\leqslant k\leqslant k_0} a_k \cdot \sum_{k=1}^{k_0} y_{\bar{x},k}^2 = -\max_{0\leqslant k\leqslant k_0} a_k \cdot (y_{\bar{x}x}, y)\,.$$

Разложим функцию y по системе $\left\{\mu^{(n)}(x_k)\right\}$ ортонормированных собственных функций разностной задачи Штурма-Лиувилля на отрезке $[0,1]$ с условиями Дирихле: $y_k = \sum\limits_{n=1}^{k_0-1} C_n \mu_k^{(n)}$. Тогда

$$y_{\bar{x}x} = -\sum_{n=1}^{k_0-1} \lambda_n C_n \mu_k^{(n)},$$

и

$$(Ay, y) \leqslant \max_{0\leqslant k\leqslant k_0} a_k \cdot \sum_{n=1}^{k_0-1} \lambda_n C_n^2 \leqslant \frac{4}{h^2} \max_{0\leqslant k\leqslant k_0} a_k \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{k_0-1} C_n^2}_{=\|y\|^2},$$

так как $\max\limits_n \lambda_n = \lambda_{k_0-1} \leqslant \dfrac{4}{h^2}$.

Итак, $\|A\| \leqslant \dfrac{4}{h^2} \max\limits_{x\in\omega_h} a(x)$, и условие устойчивости схемы по начальным данным принимает вид:

$$\|A\|^{-1} + (\sigma - 0.5)\tau \geqslant \frac{h^2}{4\max\limits_{x\in\omega_h} a(x)} + (\sigma - 0.5)\tau \geqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad \sigma \geqslant 0.5 - \frac{h^2}{4\tau \max\limits_{x\in\omega_h} a(x)}.$$

По аналогии с рассмотренной схемой построим для абстрактной задачи

$$y_t + Ay = \varphi,$$

где $A > 0$ — несамосопряженный оператор, схему с весами

$$y_t + \sigma A\hat{y} + (1-\sigma)Ay = \varphi \quad\Leftrightarrow\quad (E + \sigma\tau A)y_t + Ay = 0. \tag{2.10}$$

Она не принадлежит к исходному семейству схем, но поскольку $A > 0$, существует обратный оператор $A^{-1} > 0$. Применяя A^{-1} к уравнению (2.10), получим

$$\tilde{B}y_t + \tilde{A}y = 0,$$

где $\tilde{B} = A^{-1} + \sigma\tau E$, $\tilde{A} = E$. Теперь оператор $\tilde{A}$ является самосопряженным и положительно определенным, а оператор $\tilde{B}$ — положительно определенным при $\sigma \geqslant 0$. Условие устойчивости (2.7) в пространстве $H_{\tilde{A}} = H_E = H_h$ имеет вид:

$$\tilde{B} - 0.5\tau\tilde{A} = A^{-1} + (\sigma - 0.5)\tau E \geqslant 0.$$

Оно будет выполнено при $\sigma \geqslant 0.5$. Итак, условие $\sigma \geqslant 0.5$ является достаточным для выполнения оценки

$$\|y_j\| \leqslant \|y^{(0)}\|$$

для решения уравнения (2.10) с начальным условием $y_0 = y^{(0)}$ в случае $A > 0$, $A \neq A^*$.

2.4 Метод разделения переменных

Если $A = A^* > 0$ и $B = B^* > 0$, то устойчивость схемы

$$\begin{cases} By_t + Ay = 0, \quad t \in \omega_\tau, \\ y(0) = y^{(0)} \end{cases}$$

в H_A при $B \geqslant 0.5\tau A$ можно доказать с помощью метода разделения переменных.

Пусть N — размерность конечномерного пространства H, λ_k — собственные значения, а ξ_k — ортонормированные собственные функции задачи

$$A\xi_k = \lambda_k B\xi_k, \quad k = 1, 2, ..., N,$$

причем

$$(B\xi_k, \xi_m) = \delta_{k,m}. \tag{2.11}$$

Так как $A > 0$, то $\lambda_k > 0$, $k = 1, 2, ..., N$.

Решение задачи будем искать в виде:

$$y(t) = \sum_{k=1}^{N} C_k(t)\xi_k.$$

Так как

$$Ay = \sum_{k=1}^{N} C_k(t)A\xi_k = \sum_{k=1}^{N} C_k(t)\lambda_k B\xi_k,$$

то, подставляя решение в виде разложения по собственным функциям в уравнение, получаем:

$$\sum_{k=1}^{N} \left\{ \frac{C_k(t+\tau) - C_k(t)}{\tau} + \lambda_k C_k(t) \right\} B\xi_k = 0.$$

Пользуясь условиями ортогональности (2.11), получаем:

$$\frac{C_k(t+\tau)-C_k(t)}{\tau}+\lambda_k C_k(t)=0 \;\;\Rightarrow\;\; C_k(t+\tau)=(1-\tau\lambda_k)C_k(t),\;\; k=1,2,...,N.$$

Следовательно,

$$y(t+\tau)=\sum_{k=1}^{N} C_k(t+\tau)\xi_k=\sum_{k=1}^{N}(1-\tau\lambda_k)C_k(t)\xi_k.$$

Оценим норму $y(t+\tau)$:

$$\|y(t+\tau)\|_A^2=\left(Ay(t+\tau),y(t+\tau)\right).$$

Поскольку

$$\|y(t)\|_A^2=(Ay(t),y(t))=\left(\sum_{k=1}^{N} C_k(t)\lambda_k B\xi_k,\sum_{k=1}^{N} C_k(t)\xi_k\right)=\sum_{k=1}^{N}\lambda_k C_k^2(t),$$

то

$$\|y(t+\tau)\|_A^2=\sum_{k=1}^{N}\lambda_k C_k^2(t+\tau)=\sum_{k=1}^{N}\lambda_k(1-\tau\lambda_k)^2C_k^2(t)\leqslant$$

$$\leqslant\max_{1\leqslant k\leqslant N}(1-\tau\lambda_k)^2\underbrace{\sum_{k=1}^{N}\lambda_k C_k^2(t)}_{\|y(t)\|_A^2}.$$

Следовательно,

$$\|y(t+\tau)\|_A\leqslant\max_{1\leqslant k\leqslant N}|1-\tau\lambda_k|\cdot\|y(t)\|_A \;\;\Rightarrow\;\; \|y(t+\tau)\|_A\leqslant\|y(t)\|_A\leqslant\|y(0)\|_A,$$

если $|1-\tau\lambda_k|\leqslant 1$ для всех $k=1,2,...,N$. Последнее условие будет выполнено, если при всех k справедлива оценка

$$0<\lambda_k\leqslant\frac{2}{\tau}. \tag{2.12}$$

Покажем эквивалентность неравенства (2.12) и неравенства $B\geqslant 0.5\tau A$. Рассмотрим выражение

$$By-0.5\tau Ay=\sum_{k=1}^{N} C_k(t)\left(B\xi_k-0.5\tau A\xi_k\right)=\sum_{k=1}^{N} C_k(t)\left(1-0.5\tau\lambda_k\right)B\xi_k$$

и вычислим функционал:

$$(By,y)-0.5\tau(Ay,y)=\sum_{k=1}^{N} C_k^2(t)\left(1-0.5\tau\lambda_k\right).$$

Из последнего равенства следует эквивалентность (2.12) и $B\geqslant 0.5\tau A$.

2.5 Устойчивость по начальным данным в H_B

Теорема 2.7 *Пусть в схеме (2.1) операторы A и B не зависят от t, причем $A = A^* > 0$, $B = B^* > 0$. Тогда условие (2.7) достаточно для устойчивости схемы (2.1) по начальным данным в пространстве H_B, причем*

$$\|y_j\|_B \leqslant \|y^{(0)}\|_B.$$

Доказательство. Если $A = A^* > 0$ и $B = B^* > 0$, то можно ввести энергетические нормы $\|\cdot\|_A$ и $\|\cdot\|_B$. Пусть $B \geqslant 0.5\tau A$. Тогда

$$((B - 0.5\tau A)y_t, y_t) = \|y_t\|_B^2 - 0.5\tau\|y_t\|_A^2 \geqslant 0.$$

Воспользуемся вторым энергетическим тождеством (2.6) в случае $\varphi \equiv 0$:

$$\|\hat{y}\|_B^2 + \tau^2 \underbrace{\left(\|y_t\|_B^2 - 0.5\tau\|y_t\|_A^2\right)}_{\geqslant 0} + 0.5\tau\|\hat{y} + y\|_A^2 = \|y\|_B^2 \quad \Rightarrow \quad \|\hat{y}\|_B^2 \leqslant \|y\|_B^2,$$

то есть $\|y(t)\|_B \leqslant \|y(0)\|_B$.

Замечание 2.8 *Если A и B — перестановочные операторы, то условие (2.7) необходимо и достаточно для устойчивости схемы (2.1) по начальным данным в пространстве H_D:*

$$\|y_j\|_D \leqslant \|y^{(0)}\|_D,$$

где $D = D^* > 0$ — любой оператор, перестановочный с A и B, например, $D = E$, $D = A^2$ или $D = B^2$ при $B = B^*$, так что $\|y_j\| \leqslant \|y^{(0)}\|$, $\|Ay_j\| \leqslant \|Ay^{(0)}\|$, $\|By_j\| \leqslant \|By^{(0)}\|$ и т.д.

2.6 Устойчивость по правой части

В главе "Операторно-разностные схемы"была доказана теорема 1.14 о том, что из устойчивости двухслойной схемы с постоянными операторами по начальным данным в норме $\|\cdot\|_{(h1)}$ следует устойчивость по правой части уравнения, причем

$$\|y_{j+1}\|_{(h1)} \leqslant M_1 \left\{ \|y_0\|_{(h1)} + \sum_{p=0}^{j} \|B^{-1}\varphi_p\|_{(h1)}\tau \right\}.$$

Из этого следует терема:

Теорема 2.9 *Если выполнено условие (2.7), то схема*

$$\begin{cases} By_t + Ay = \varphi(t), \;\; t = j\tau \in \omega_\tau, \\ y(0) = y^{(0)}, \end{cases} \tag{2.13}$$

принадлежащая исходному семейству схем, устойчива по правой части, причем справедлива априорная оценка:

$$\|y_{j+1}\|_A \leqslant \|y_0\|_A + \sum_{p=0}^{j} \|B^{-1}\varphi_p\|_A \tau.$$

Если, кроме того, оператор B самосопряжен, то также справедлива оценка:

$$\|y_{j+1}\|_B \leqslant \|y_0\|_B + \sum_{p=0}^{j} \|\varphi_p\|_{B^{-1}} \tau.$$

В правой части последнего неравенства стоит *негативная норма* $\|\cdot\|_{B^{-1}}$. Если B — самосопряженный положительно определенный оператор и B^{-1} существует, то можно ввести негативную норму:

$$\|\varphi\|_{B^{-1}} = \sqrt{(B^{-1}\varphi, \varphi)} = \sup_{x \neq 0} \frac{|(\varphi, x)|}{\|x\|_B}.$$

Очевидно, что

$$\|B^{-1}\varphi\|_B^2 = (B^{-1}\varphi, B^{-1}\varphi)_B = (BB^{-1}\varphi, B^{-1}\varphi) = (\varphi, B^{-1}\varphi) = \|\varphi\|_{B^{-1}}^2.$$

Исследуем, при каких условиях на операторы задачи имеет место устойчивость по правой части в исходной норме $\|\varphi\|_{(h2)} = \|\varphi\|$. Ответ дает следующая теорема:

Теорема 2.10 *Пусть выполнено условие:*

$$B \geqslant \varepsilon E + 0.5\tau A, \tag{2.14}$$

где ε — некоторое положительное число, а схема (2.13) принадлежит исходному семейству схем. Тогда для решения задачи (2.13) верна априорная оценка:

$$\|y_{j+1}\|_A^2 \leqslant \|y_0\|_A^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{p=0}^{j} \|\varphi_p\|^2 \tau. \tag{2.15}$$

Доказательство. Рассмотрим первое энергетическое тождество:

$$2\tau((B - 0.5\tau A)y_t, y_t) + \|\hat{y}\|_A^2 = \|y\|_A^2 + 2\tau(\varphi, y_t).$$

По условию $B - 0.5\tau A \geqslant \varepsilon E$, откуда получаем:

$$2\tau((B - 0.5\tau A)y_t, y_t) \geqslant 2\tau\varepsilon(y_t, y_t) = 2\tau\varepsilon\|y_t\|^2.$$

Следовательно,

$$2\tau\varepsilon\|y_t\|^2 + \|\hat{y}\|_A^2 \leqslant \|y\|_A^2 + 2\tau(\varphi, y_t) \leqslant \|y\|_A^2 + 2\tau|(\varphi, y_t)|.$$

Оценим последнее слагаемое в правой части этого неравенства, пользуясь неравенством Коши-Буняковского:

$$|(\varphi, y_t)| \leqslant \|\varphi\|\|y_t\|.$$

Так как

$$a \cdot b \leqslant \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}, \ \ \forall a, b,$$

то имеет место неравенство:

$$a \cdot b = \sqrt{2\varepsilon} a \cdot \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} b \leqslant \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Пользуясь этим неравенством, получим:

$$2\tau|(\varphi, y_t)| \leqslant 2\tau\varepsilon\|y_t\|^2 + \frac{\tau}{2\varepsilon}\|\varphi\|^2.$$

Таким образом, справедливо неравенство:

$$2\tau\varepsilon\|y_t\|^2 + \|\hat{y}\|_A^2 \leqslant \|y\|_A^2 + 2\tau\varepsilon\|y_t\|^2 + \frac{\tau}{2\varepsilon}\|\varphi\|^2 \ \ \Rightarrow \ \ \|\hat{y}\|_A^2 \leqslant \|y\|_A^2 + \frac{\tau}{2\varepsilon}\|\varphi\|^2$$

Следовательно,

$$\|y_{j+1}\|_A^2 \leqslant \|y_j\|_A^2 + \frac{\tau}{2\varepsilon}\|\varphi_j\|^2 \leqslant \|y_{j-1}\|_A^2 + \frac{\tau}{2\varepsilon}\|\varphi_{j-1}\|^2 + \frac{\tau}{2\varepsilon}\|\varphi_j\|^2 \leqslant ... \leqslant$$

$$\leqslant \|y_0\|_A^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\sum_{p=0}^{j}\|\varphi_p\|^2\tau.$$

Замечание 2.11 *Теорема 2.10 сохраняет силу и в случае переменного оператора $B = B(t)$, а теорема 2.7 справедлива для переменного оператора $A = A(t)$. Это видно из доказательства соответствующих теорем энергетическим методом.*

3 Условие ρ-устойчивости схемы

Введем более общее определение устойчивости схемы по начальным данным. Пусть $D = D^* > 0$ — постоянный оператор.

Определение 3.1 *Будем говорить, что схема*

$$\begin{cases} By_t + Ay = \varphi(t), \ \ t \in \omega_\tau; \\ y(0) = y^{(0)} \end{cases}$$

ρ-устойчива по начальным данным, если для решения соответствующей задачи для однородного уравнения

$$\begin{cases} By_t + Ay = 0, \ \ t \in \omega_\tau; \\ y(0) = y^{(0)} \end{cases} \tag{3.1}$$

при любом $y^{(0)} \in H$ выполнено неравенство

$$\|y_j\|_D \leqslant \rho^j \|y^{(0)}\|_D,$$

где $\rho = e^{C_0 \tau}$, C_0 — постоянная, не зависящая от h, τ и выбора $y^{(0)}$.

Если схема ρ-устойчива в H_D, то она устойчива в H_D:

$$\|y_j\|_D \leqslant M_1 \|y^{(0)}\|_D, \quad j = 1, 2, ..., j_0, \ \tau j_0 = T$$

с постоянной $M_1 = e^{C_0 T}$, если $C_0 > 0$, и $M_1 = 1$, если $C_0 \leqslant 0$.

Схему (3.1) с постоянными операторами A и B можно свести к явной схеме $x_t + Cx = 0$ или $x_{j+1} = (E - \tau C)x_j$, если провести замену:
1) $x_j = B^{1/2} y_j$ при $B = B^* > 0$ и $C = C_1 = B^{-1/2} \cdot A \cdot B^{-1/2}$;
2) $x_j = A^{1/2} y_j$ при $A = A^* > 0$ и $C = C_2 = A^{1/2} \cdot B^{-1} \cdot A^{1/2}$.

Заметим, что:
$\|x_j\| = \|y_j\|_B$ при $C = C_1$, $x_j = B^{1/2} y_j$;
$\|x_j\| = \|y_j\|_A$ при $C = C_2$, $x_j = A^{1/2} y_j$.

Таким образом, условие ρ-устойчивости неявной схемы (3.1) в H_D при $D = B$ или $D = A$ эквивалентно условию ρ-устойчивости соответствующей явной схемы в H: $\|x_j\| \leqslant \rho^j \|x_0\|$, $j = 1, 2, ..., j_0$.

Лемма 3.2 *Условие ρ-устойчивости явной схемы*

$$\begin{cases} x_t + Cx = 0, \ \ t \in \omega_\tau; \\ x_0 = x^{(0)} \end{cases}$$

с постоянным оператором C эквивалентно условию ограниченности нормы оператора перехода со слоя на слой:

$$\|S\| = \|E - \tau C\| \leqslant \rho.$$

Доказательство. Так как

$$x_j = Sx_{j-1} = S^2 x_{j-2} = ... = S^j x_0 \ \Rightarrow \ \|x_j\| \leqslant \|S\|^j \|x_0\|,$$

то условия $\|x_j\| \leqslant \rho^j \|x_0\|$ и $\|S\| = \|E - \tau C\| \leqslant \rho$ эквивалентны.

Лемма 3.3 *Если $A = A^* > 0$ и $B = B^* > 0$, то неравенства*

$$\gamma_1 B \leqslant A \leqslant \gamma_2 B \ \ и \ \ \gamma_1 E \leqslant C \leqslant \gamma_2 E \tag{3.2}$$

эквивалентны при $C = C_1 = B^{-1/2} \cdot A \cdot B^{-1/2}$ *либо* $C = C_2 = A^{1/2} \cdot B^{-1} \cdot A^{1/2}$.

Доказательство. Пусть $C = C_1 = B^{-1/2} \cdot A \cdot B^{-1/2}$ и γ — произвольное число. Тогда:

$$(Cx, x) - \gamma(x, x) = (B^{-1/2} \cdot A \cdot B^{-1/2}x, x) - \gamma(x, x) = (Ay, y) - \gamma(By, y), \quad y = B^{-1/2}x.$$

Следовательно, знаки операторов $C - \gamma E$ и $A - \gamma B$ совпадают. При этом не требуется положительности оператора A.

Пусть теперь $C = C_2 = A^{1/2} \cdot B^{-1} \cdot A^{1/2}$. Покажем сначала, что неравенства $C \geqslant \gamma E$ ($C \leqslant \gamma E$) и $E \geqslant \gamma C^{-1}$ (соответственно, $E \leqslant \gamma C^{-1}$) эквивалентны. По предположению C — самосопряженный оператор, поэтому:

$$(Cx, x) - \gamma(x, x) = (C^{1/2}x, C^{1/2}x) - \gamma(C^{-1/2}C^{1/2}x, C^{-1/2}C^{1/2}x) = (y, y) - \gamma(C^{-1}y, y), \;\; y = C^{1/2}x.$$

Следовательно, операторы $C - \gamma E$ и $E - \gamma C^{-1}$ имеют одинаковые знаки. Положим $C^{-1} = A^{-1/2} \cdot B \cdot A^{-1/2}$ и обозначим $v = A^{-1/2}y$. Так как

$$(y, y) - \gamma(A^{-1/2} \cdot B \cdot A^{-1/2}y, y) = (Av, v) - \gamma(Bv, v),$$

то операторы $C - \gamma E$ и $A - \gamma B$ имеют одинаковые знаки. Полагая $\gamma = \gamma_1$ и $\gamma = \gamma_2$, получаем эквивалентность неравенств (3.2).

Лемма 3.4 *Если* $C = C^* > 0$, $\tau > 0$, *то условия*

$$\|S\| = \|E - \tau C\| \leqslant \rho \quad \text{и} \quad \frac{1-\rho}{\tau}E \leqslant C \leqslant \frac{1+\rho}{\tau}E \tag{3.3}$$

эквивалентны.

Доказательство. Так как $S = E - \tau C = S^*$, то

$$\|S\| = \sup_{\|x\|=1} |(Sx, x)| = \sup_{\|x\|=1} |((E - \tau C)x, x)|.$$

Если $\|S\| \leqslant \rho$, то

$$-\rho \leqslant ((E - \tau C)x, x) \leqslant \rho \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\tau}\left((x, x) - \rho\right) \leqslant (Cx, x) \leqslant \frac{1}{\tau}\left(\rho + (x, x)\right), \;\; \|x\| = 1.$$

Следовательно,

$$\frac{1-\rho}{\tau}E \leqslant C \leqslant \frac{1+\rho}{\tau}E.$$

В обратную сторону неравенство доказывается аналогично.

Теорема 3.5 *Пусть* A *и* B *— постоянные операторы, причем* $A = A^*$, $B = B^* > 0$. *Тогда условия*

$$\frac{1-\rho}{\tau}B \leqslant A \leqslant \frac{1+\rho}{\tau}B \tag{3.4}$$

необходимы и достаточны для ρ-устойчивости в H_B схемы (3.1): $\|y_j\|_B \leqslant \rho^j \|y_0\|_B$, а если, кроме того, $A > 0$, то и для ρ-устойчивости в H_A: $\|y_j\|_A \leqslant \rho^j \|y_0\|_A$.

Доказательство. Так как по условию $B = B^* > 0$, сведем неявную схему (3.1) к явной с оператором $C = B^{-1/2} \cdot A \cdot B^{-1/2}$. Тогда, в силу леммы 3.3, условия (3.4) эквивалентны условиям

$$\frac{1-\rho}{\tau} E \leqslant C \leqslant \frac{1+\rho}{\tau} E,$$

что в свою очередь, в силу леммы 3.4 и леммы 3.2, является необходимым и достаточным условием устойчивости схемы.